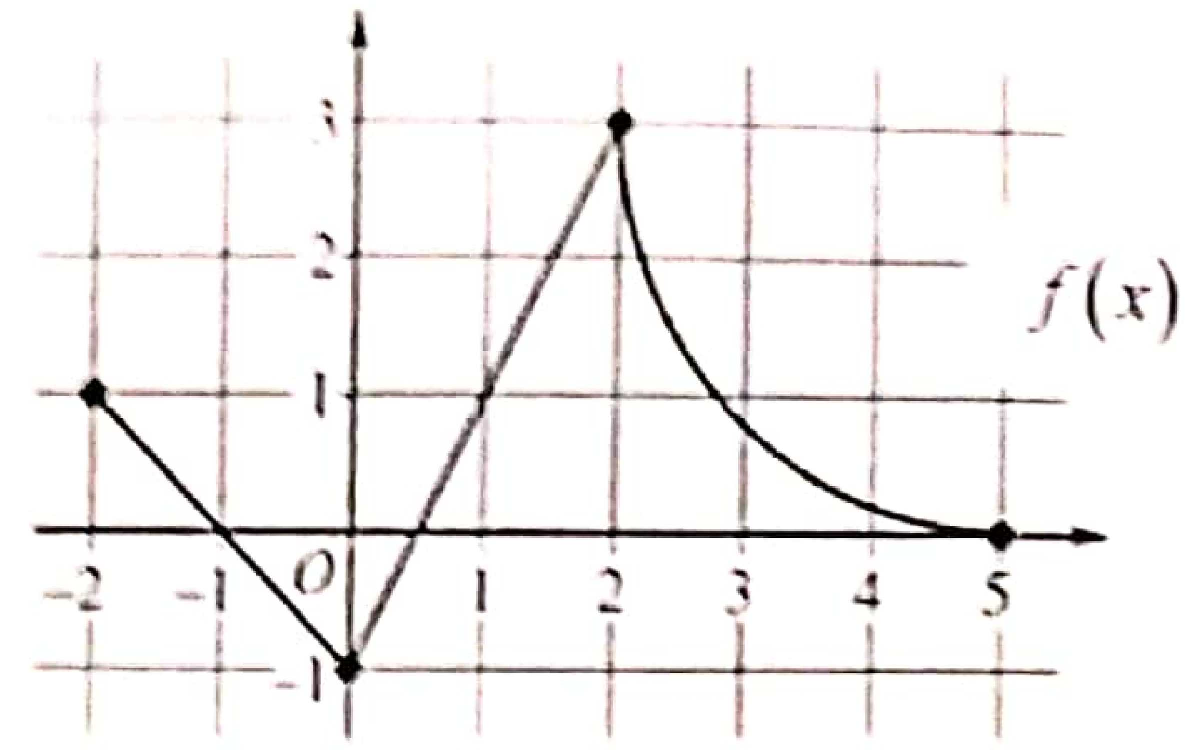
— Cevap Anahtası —

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 102 ANALİZ II DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) Yandaki şekilde $[-6,5]$ aralığında tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu grafiğinin bir parçası verilmiştir. Bu grafik parçası iki doğru parçası ve (5,3) merkezli bir çeyrek çemberden oluşmaktadır. $f(3)=3-\sqrt{5}$ olduğuna göre



(a) $\int_{-6}^{5} f(x)\,dx = 7$ olduğuna göre $\int_{-6}^{-2} f(x)\,dx = ?$

(b) $\int_{3}^{5} \left(2f'(x)+4\right)dx = ?$

(c) $g(x)=\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ şeklinde tanımlı $g(x)$ fonksiyonunun $[-2,5]$ aralığındaki mutlak maksimum değerini bulunuz.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x-3f'(x)}{f(x)-\arctan x}$ limitini hesaplayınız.

ⓐ $$7=\int_{-6}^{5} f(x)\,dx = \int_{-6}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

$$7 = \int_{-6}^{-2} f(x)\,dx + \cancelto{0}{\int_{-2}^{0} f(x)\,dx} + \cancelto{0}{\int_{0}^{1} f(x)\,dx} + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$$

$$7=\int_{-6}^{-2} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx \Rightarrow 7=\int_{-6}^{-2} f(x)\,dx + 2 + 9 - \frac{9\pi}{4}$$

$$\int_{-6}^{-2} f(x)\,dx = \frac{9\pi}{4} - 4 = \frac{9\pi-16}{4} \text{ br}^2$$

ⓑ $$\int_{3}^{5}\left[2f'(x)+4\right]dx = 2\int_{3}^{5} f'(x)\,dx + 4\int_{3}^{5} dx = 2f(x)\Big|_{3}^{5} + 8$$

$$= 2\left[f(5)-f(3)\right]+8 = 8-2f(3)$$

$$= 8-6+2\sqrt{5} = 2+2\sqrt{5}$$

ⓒ $[-2,5]$ aralığında $g(x)=\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ için İntegralin temel teoremiyle

$g'(x) = f(x).1 - f(-2).0 = f(x)$ olur. $g'(x)=0 \Rightarrow$

$f(x)=0 \Rightarrow x=-1,\ x=\frac{1}{2},\ x=5$ olur.

f integrallenebilir olduğundan g sürekli ve türevlenebilir olur. O zaman

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$		5
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Mutlak maximum için $x=-2$, $x=-1$ ve $x=5$ noktaları incelenmelidir.

$g(-2)=0$, $g(-1)=\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$, $g(5)=\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 11-\frac{9\pi}{4}$

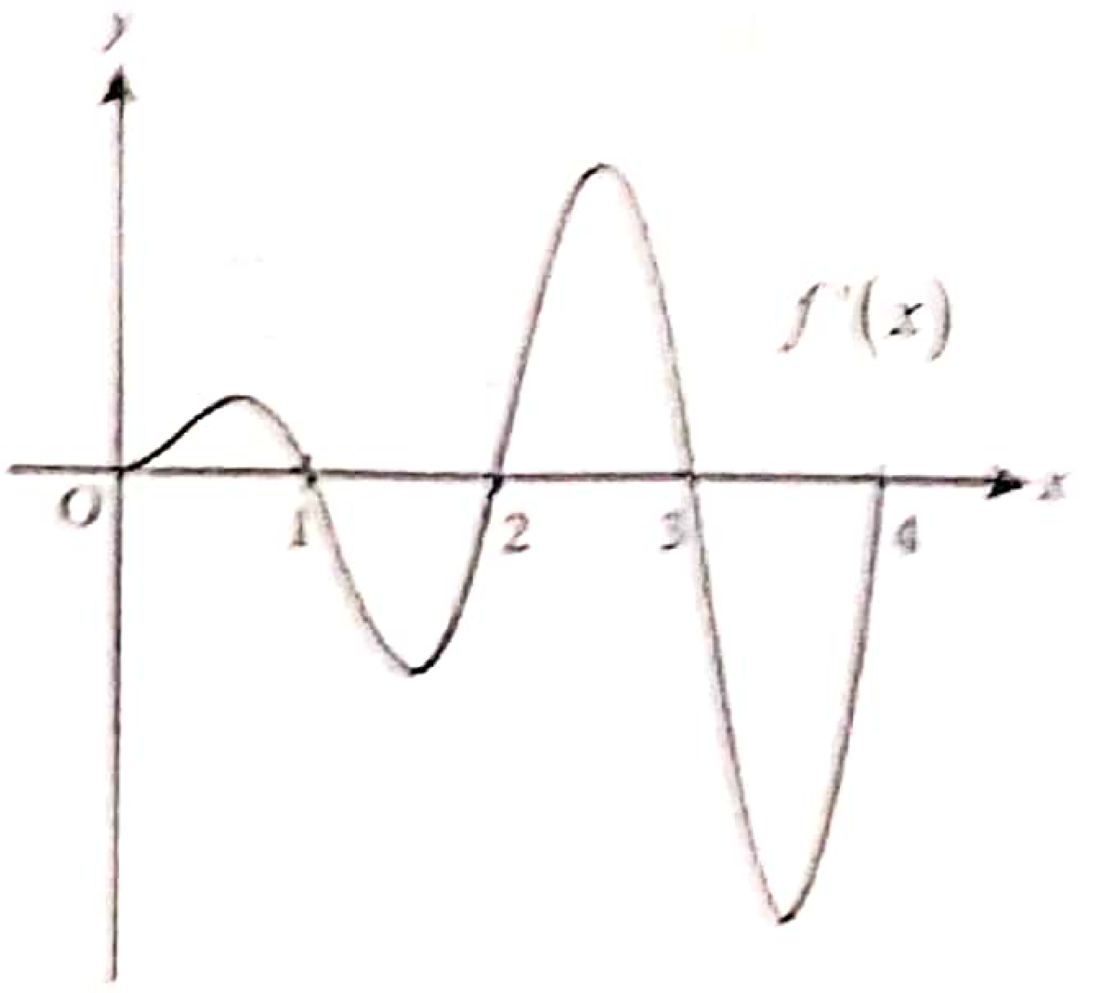
olduğundan mutlak maximum noktası $x=5$, değeri ise

$g(5)=\frac{44-9\pi}{4}$ olur.

ⓓ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{10^x - 3f'(x)}{f(x)-\arctan x} = \frac{10^1 - 3f'(1)}{f(1)-\arctan 1} = \frac{10-6}{1-\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{16}{4-\pi}$ bulunur.

2) Yandaki şekilde ikinci mertebeden türevlenebilir $f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$ fonksiyonunun $[0.4]$ aralığındaki grafiği verilmiştir. Bu grafiğin $x-$ ekseni ile beraber sınırlandırdıkları bölgelerin alanları sırasıyla 2, 6, 10 ve 14 br^2 olup bu grafiğe $x=\frac{3}{5}, x=\frac{8}{5}, x=\frac{5}{2}$ ve $x=\frac{7}{2}$ noktalarından çizilen teğetler $x-$ eksenine teğettir. $f(2)=5$ olduğu bilindiğine göre



(a) $y=f(x)$ fonksiyonunun hem azalan hemde aşağı bükey(konkav) olduğu aralıklar nedir?

(b) $y=f(x)$ fonksiyonunun $[0,4]$ aralığındaki yerel ekstremumlarını ve mutlak minimum noktalarını bulunuz.

(c) $\int_0^4 f(x)f'(x)dx$ integralini hesaplayınız.

(d) $g(x)=x^3f(x)$ için $g'(2)$ değerini bulunuz.

ⓐ $y=f(x)$ için azalan $\Rightarrow f'(x)<0$

aşağı bükey $\Rightarrow f''(x)<0$

x	0		1		2		3		4
f'	0	+	0	−	0	+	0	−	0
f		↗		↘		↗		↘	

$(1,2)\cup(3,4)$ aralığında f azalandır.

∗ $f'(x)$ fonksiyonu $x=3/5$, $x=8/5$, $x=5/2$ ve $x=7/2$ noktalarında x-eksenine paralel olduklarından $f''(x)$ fonksiyonu bu noktalarda sıfır olur.

x	0		3/5		8/5		5/2		7/2		4
f''		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
f		∪		∩		∪		∩		∪	

f, $(3/5, 8/5)$ ve $(5/2, 7/2)$ aralıklarında aşağı bükeydir. O zaman

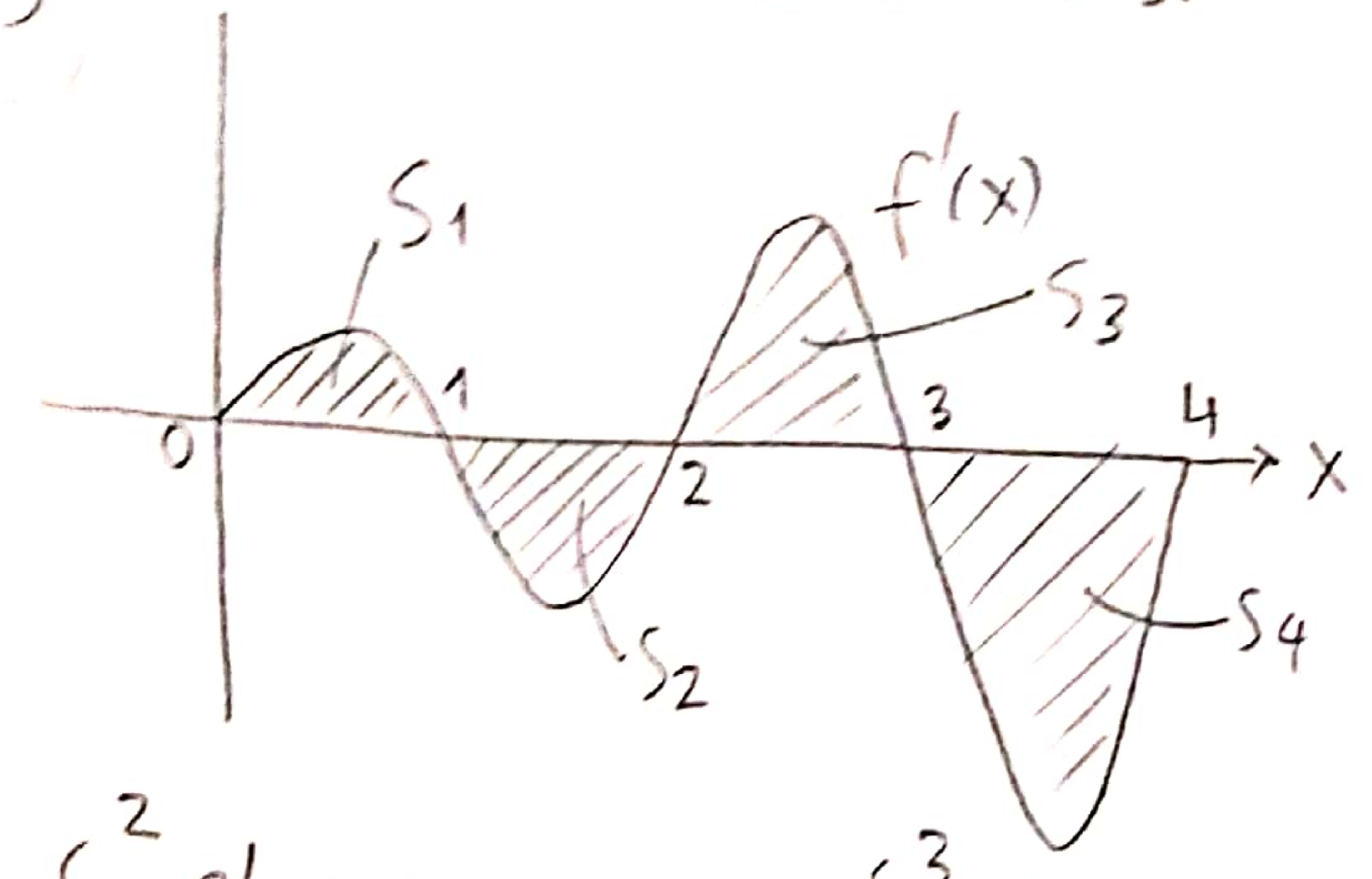
$\left(1, \frac{8}{5}\right)$ ve $\left(3, 7/2\right)$ aralıklarında hem azalan hemde aşağı bükeydir.

ⓑ $[0,4]$ aralığında $y = f'(x)$ grafiğinden

x	0		1		2		3		4
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↗		↘		↗		↘	

$x=1$, $x=3$ yerel maximum
$x=0$, $x=2$ ve $x=4$
yerel minimum noktalarıdır.

$f(2)=5$ olması kullanılırsa



$S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 10$
$S_4 = 14$ old. dan

$\int_0^1 f'(x)\,dx = 2$,

$\int_1^2 f'(x)\,dx = -6$, $\int_2^3 f'(x)\,dx = 10$, $\int_3^4 f'(x)\,dx = -14$ olur.

Buna göre $\boxed{f(1) - f(0) = 2}$ $\boxed{f(2) - f(1) = -6}$

$\boxed{f(3) - f(2) = 10}$ $\boxed{f(4) - f(3) = -14}$ ile $f(1) = 11$, $f(0) = 9$,

$f(3) = 15$, $f(4) = -29$ olur. O zaman mutlak minimum değeri -29 olur.

ⓒ $\displaystyle\int_0^4 f(x) \cdot f'(x)\,dx = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^4 = \frac{1}{2}\left[f^2(4) - f^2(0)\right]$

$= 380$ dir.

ⓓ $g(x) = x^3 f(x) \rightarrow g'(x) = 3x^2 \cdot f(x) + x^3 \cdot f'(x) \Rightarrow$

$g'(2) = 12 f(2) + 8 \cdot f'(2) = 60$ olur.

3) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon ise f integrallenebilirdir, gösteriniz.

f, $[a,b]$-de monoton artan bir fonksiyon ve $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ kümesi $[a,b]$'nin $\|P\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ koşulunu sağlayan parçalanışı olsun. Her $k\in 1,2,\dots,n$ için $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığında f artan olduğundan $M_k(f)=f(x_k)$ ve $m_k(f)=f(x_{k-1})$ olduğundan

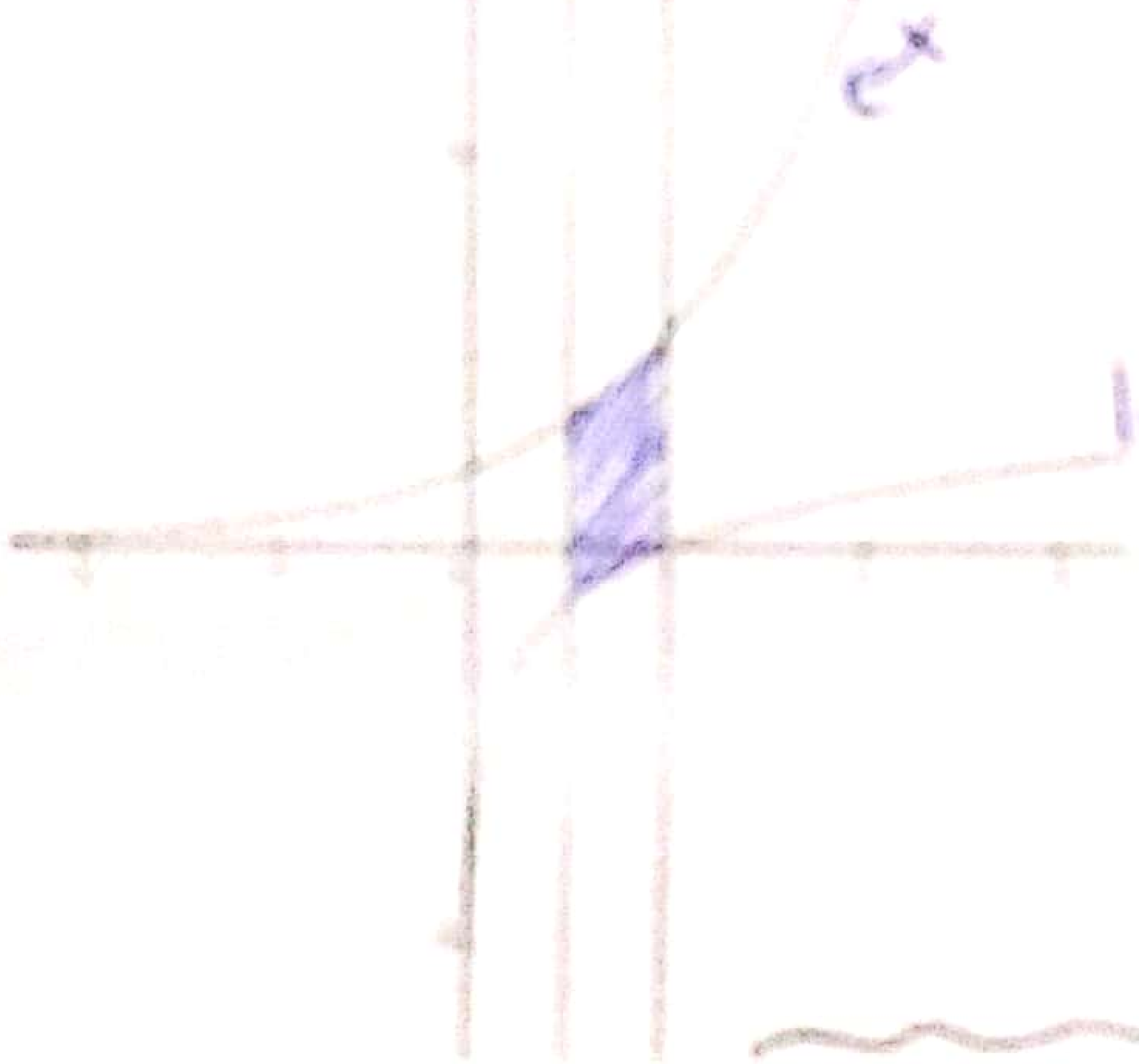
$$Ü(f,P)-A(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\left[M_k(f)-m_k(f)\right]\Delta x_k$$

$$=(M_1(f)-m_1(f))\cdot\Delta x_1+(M_2(f)-m_2(f))\cdot\Delta x_2+\dots+(M_n(f)-m_n(f))\,\Delta x_n$$

$$\leq (f(x_1)-f(x_0))\cdot\|P\|+(f(x_2)-f(x_1))\|P\|+\dots+(f(x_n)-f(x_{n-1}))\cdot\|P\|$$

$<\varepsilon$ olur Yani $f\in\mathcal{R}([a,b])$ dir.

4) $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$ eğrileri ve $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ doğrularının sınırlandırdığı bölgenin alanını ve bu bölgenin $y=4$ doğrusu etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin hacmini bulunuz.

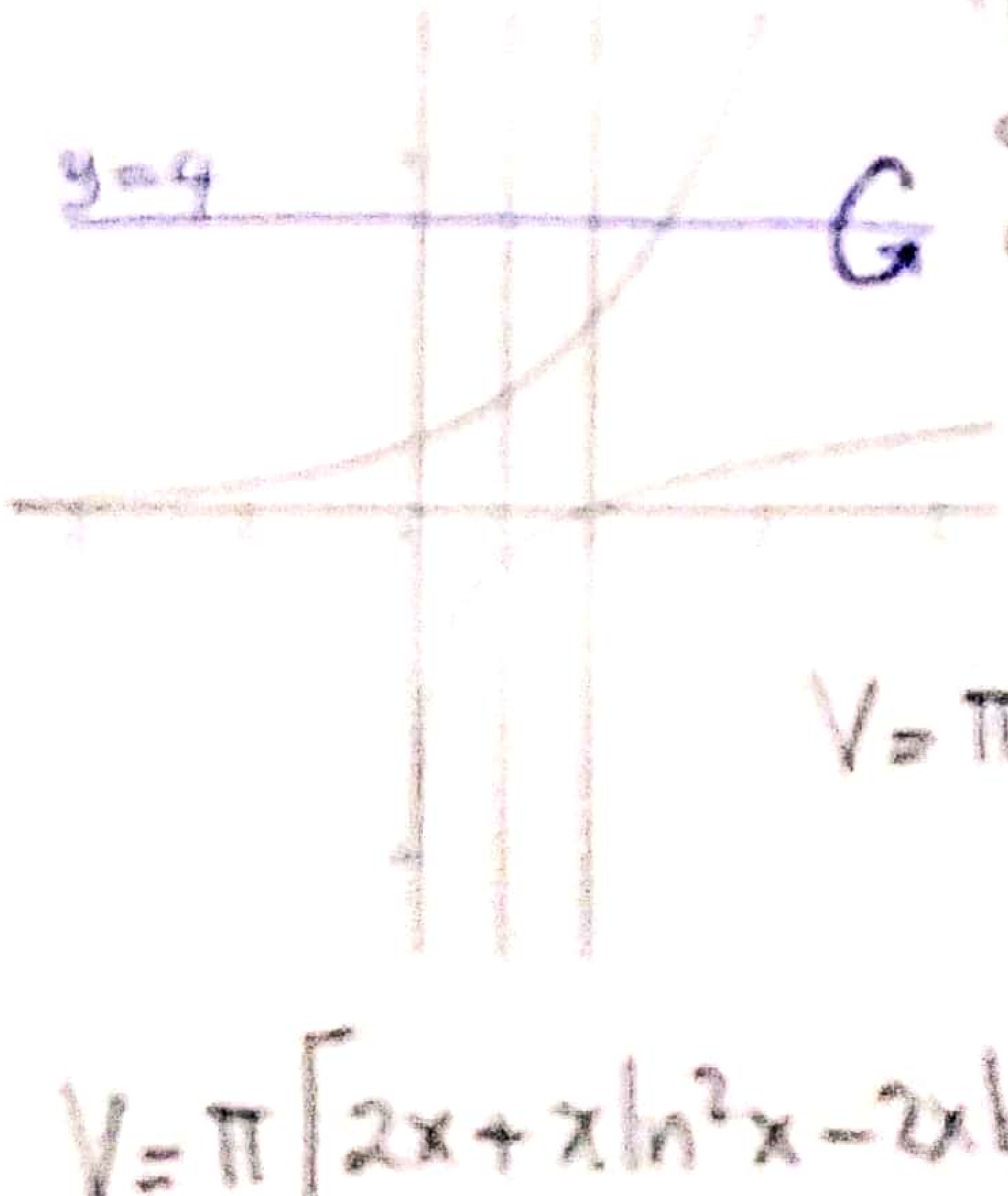


$$A=\int_{1/2}^{1}\left[e^x-\ln x\right]dx$$

$$=e^x-(x\ln x-x)\Big|_{1/2}^{1}$$

$$=e^x-x\ln x+x\Big|_{1/2}^{1}$$

$$=(e+1)-\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\ br^2$$



Tüm sistemi 4 br aşağıya ötelersek, disk yöntemi ile dönme ekseni x-ekseni olup

$$V=\pi\int_{1/2}^{1}\left([\ln x-4]^2-[e^x-4]^2\right)dx$$

$$V=\pi\int_{1/2}^{1}\left(\ln^2 x-8\ln x-e^{2x}+8e^x\right)dx$$

$$V=\pi\left[2x+x\ln^2 x-2x\ln x-8(x\ln x-x)-\frac{e^{2x}}{2}+8e^x\right]_{1/2}^{1}$$

$$=\pi\left[\left(8e-\frac{e^2}{2}+10\right)-\left(8\sqrt{e}-\frac{e}{2}+5+\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2}-5\ln\frac{1}{2}\right)\right]$$

bulunur.